直交群と特殊直交群のホモロジー安定性について (有限群のコホモロジー論とその周辺)

中田, 雅之

数理解析研究所講究録
第 1784 巻 2012 年 96-103

直交群と特殊直交群のホモロジー安定性について

京都大学大学院理学研究科数学教室　中田　雅之 (Masayuki Nakada)
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Kyoto University

1　ホモロジー安定問題について

本稿では，群の整係数ホモロジー群においては，その係数を省略する．

群と群準同型の列

$$\cdots \xrightarrow{\iota_{n-1}} G_n \xrightarrow{\iota_n} G_{n+1} \to \cdots$$

が与えられたとき，これから誘導されるホモロジー群の列

$$\cdots \to H_i(G_{n-1}, A) \to H_i(G_n, A) \to H_i(G_{n+1}, A) \to \cdots$$

に対して，$n(i) \in \mathbb{Z}$ が存在し，$n > n(i)$ のとき $H_i(\iota_n, A)\colon H_i(G_n, A) \to H_i(G_{n+1}, A)$ が同型になるとき，群の族 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は i 次のホモロジーにおいてホモロジー安定性をもつという．このとき我々の問題意識は以下である．

問題 1.1 与えられた群の族 $\{G_n\}_n$ がホモロジー安定性をもつか判定せよ．また，$\{G_n\}_n$ がホモロジー安定性をもつとき，可能な限りよい $n(i)$ を与えよ．

例えば，体 F 上の一般線形群 $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(F)$ の列 $\{\mathrm{GL}_n\}_{n\geq 0}$ と自然な右下対角成分への射入の列から誘導される列

$$\cdots \to H_i(\mathrm{GL}_{n-1}, A) \to H_i(\mathrm{GL}_n, A) \to H_i(\mathrm{GL}_{n+1}, A) \to \cdots$$

については，次が知られている．

命題 1.2 (Suslin, [6]) F が無限体のとき，射 $H_i(\iota_n)\colon H_i(\mathrm{GL}_n) \to H_i(\mathrm{GL}_{n+1})$ は $i \leq n$ で全単射であり，$\mathrm{Coker}\, H_n(\iota_{n-1})$ は $K_n^M(F)$ に同型となる．ここで，$K_n^M(F)$ は F の n 次の *Milnor* の K 群を表す．

このように，Suslin の結果では，安定性の障害に Milnor の K 群が現れているところが面白い．

直交群については，Sah の結果がよく知られている．そして，その後 Cathelineau によって，より一般の体上で定義される直交群に対しても同様の範囲でホモロジー安定性が成り立つことが示された．

F を標数が 2 でない無限体とする．F が Pythagoras 的であるとは，任意の $a, b \in F$ に対して $c^2 = a^2 + b^2$ となる $c \in F$ があることとする．二次閉体の他には，実数体 $\mathbb{R}$ も Pyhtagoras 体の例である．$x = (x_1, \dots .x_n) \in F^n$ に対して $q(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$ の形に書ける二次形式 q を，Euclid 的な二次形式と呼ぶ．二次形式 q によって定義された直交群 $\mathrm{O}_n(F, q)$ を O_n と略記する．ここでも，$\iota_n\colon \mathrm{O}_n \to \mathrm{O}_{n+1}$ は右下対角成分への自然な射入とする．

命題 1.3 (Sah, [5], Cathelineau, [2]) 標数が 2 でない *Pythagoras* 体 F 上の *Euclid* 的二次形式 q で定義された直交群の列 $\{\mathrm{O}_n\}_n$ に対して，射 $H_i(\iota_n)\colon H_i(\mathrm{O}_n) \to H_i(\mathrm{O}_{n+1})$ は $i < n$ において全単射であり，$i \leq n$ において全射である．

また，上記で定義される特殊直交群のホモロジー安定性に関しては，Cathelineau が [2] で次を示している．

命題 1.4 (Cathelineau, [2]) 上記の F がさらに二次閉であったとする．

i) 射 $H_i(\iota_n, \mathbb{Z}[1/2])\colon H_i(\mathrm{SO}_n, \mathbb{Z}[1/2]) \to H_i(\mathrm{SO}_{n+1}, \mathbb{Z}[1/2])$ は $2i < n$ で全単射であり，$2i \leq n$ で全射である．

ii) 射 $H_n(\iota_{2n}, \mathbb{Z}[1/2])$ の核は *Milnor* の K 群 $K_n^M(F)$ $(\cong K_n^M(F) \otimes \mathbb{Z}[1/2])$ に同型である．

これらの先行結果を眺めると，ホモロジー安定問題においては，その安定性が崩れるところに何らかの K 理論が現れることが期待される．したがって，ホモロジー安定問題を考えることは，K 理論を研究する立場からも重要である．

2 講演者による結果

この節でも，F は標数が 2 でない Pythagoras 体，q はその上の Euclid 的な二次形式とし，O_n，SO_n でこの二次形式によって定義される直交群と特殊直交群を表すとする．また，自明な O_n 加群 $\mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{Z}^t$ で O_n の作用を行列式で捻ったもの，つ

まり

$$g \in \mathrm{O}_n \text{ と } n \in \mathbb{Z} \text{ に対して } g{\cdot}n := \det(g)n$$

で定められた O_n 加群とする．また，O_n 加群 M に対しては，$M^t := \mathbb{Z}^t \otimes M$ とする．

2.1 主定理

講演者は次を示した．

定理 2.1 $H_i(\iota_n)\colon H_i(\mathrm{SO}_n) \to H_i(\mathrm{SO}_{n+1})$ は $2i < n$ で全単射，$2i \leq n$ で全射となる．

この定理の証明には，次が必要である．

命題 2.2 射 $H_i(\iota_n, \mathbb{Z}^t)\colon H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{O}_{n+1}, \mathbb{Z}^t)$ は $2i < n$ で全単射，$2i \leq n$ で全射となる．

この命題の証明のためには，次のスペクトル系列の計算が必要になる:

$$\tilde{E}^1_{p,q} = H_p(\mathrm{O}_{n+1}, \tilde{C}^t_q).$$

この複体 $\tilde{C}_*$ は最初 Suslin によって [6] で用いられ，後に Sah によって [5] で改良されたものを，命題の証明のために少し修正したものである．

スペクトル系列 $\tilde{E}^r$ は，次の性質をもつ．

$$\tilde{E}^2_{p,0} \cong H_p(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t).$$

この性質によって，命題が示される．

$\mathbb{Z}\,\mathrm{O}_n$ 加群の短完全列

$$0 \to \mathbb{Z}^t \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2] \to \mathbb{Z} \to 0$$

から得られる Bockstein 長完全列に Shapiro の補題から得られる自然な同型

$$H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \cong H_i(\mathrm{SO}_n)$$

を用いれば，長完全列

$$\cdots \to H_{i+1}(\mathrm{O}_n) \to H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{SO}_n) \to H_i(\mathrm{O}_n) \to H_{i-1}(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \to \cdots$$

が得られる．

注意 2.3 長完全列 (2.1) に現れる $H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{SO}_n)$ はトレース写像 tr^t に一致する．このことは後で用いる．

この長完全列と，ι_n から誘導される射を組み合わせると，次が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{i+1}(\mathrm{O}_n) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(\mathrm{SO}_n) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(\mathrm{O}_n) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{i+1}(\mathrm{O}_{n+1}) \arrow[r] & H_i(\mathrm{O}_{n+1}, \mathbb{Z}^t) \arrow[r] & H_i(\mathrm{SO}_{n+1}) \arrow[r] & H_i(\mathrm{O}_{n+1}) \arrow[r] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

ここに命題 1.3 と 2.2 を用いれば，定理 2.1 が得られる．

注意 2.4 実は，上の定理 *2.1* の証明においては，直接 F が *Pythagoras* 的であることを用いていない．しかし，この後の議論を簡潔にするために，本稿では F に *Pythagoras* 的であることを要請する．

3 応用

直交群と特殊直交群の間には，次の完全列がある．

$$1 \to \mathrm{SO}_n \to \mathrm{O}_n \to \mathbb{Z}/2 \to 0 \tag{3.1}$$

ここで $\mathrm{O}_n \to \mathbb{Z}/2 = \{\pm 1\}$ は，行列式で定義される準同型である．この完全列 (3.1) は分裂する．切断 $s_n\colon \mathbb{Z}/2 \to \mathrm{O}_n$ は

$$\mathbb{Z}/2 \ni \pm 1 \mapsto \mathrm{diag}(\pm 1, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{O}_n \tag{3.2}$$

で与えられる．

3.1 飛び石的ホモロジー安定性

$n = 2m+1$ のときには，次のように切断を与えることも可能である．

$$s_{2m+1}\colon \mathbb{Z}/2 \to \mathrm{O}_{2m+1}, \quad \pm 1 \mapsto \pm 1_{2m+1} = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$$

これは，群 O_{2m+1} が $\mathbb{Z}/2$ と SO_{2m+1} の直積に同型になることを示している．ゆえに，ここで Künneth の公式を用いれば

$$\begin{aligned} H_i(\mathrm{O}_{2m+1}) &\cong \bigoplus_{p+q=i} H_p(\mathrm{SO}_{2m+1}) \otimes H_q(\mathbb{Z}/2) \oplus \bigoplus_{p+q=i-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(\mathrm{SO}_{2m+1}), H_q(\mathbb{Z}/2)) \\ &= H_i(\mathrm{SO}_{2m+1}) \oplus (\text{other direct summands}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

が得られる．この直和分解は ι_{2m+1} に対して自然であるから，直交群に関するホモロジー安定性の命題 1.3 から特殊直交群に対して

命題 3.1 射 $H_i(\iota_{2m+1})\colon H_i(\mathrm{SO}_{2m+1}) \to H_i(\mathrm{SO}_{2m+3})$ は $i < 2m+1$ で全単射であり，$i \leq 2m+1$ で全射である．

を得る．また，主定理の証明と同様に Bockstein 長完全列を用いることで

命題 3.2 射 $H_i(\iota_{2m+1}, \mathbb{Z}^t)\colon H_i(\mathrm{O}_{2m+1}, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{O}_{2m+3}, \mathbb{Z}^t)$ は $i < 2m+1$ で全単射であり，$i \leq 2m+1$ で全射である．

も得る．

このように，奇数次の特殊直交群や直交群の $\mathbb{Z}^t$ 係数のホモロジー群に対してはホモロジー安定性の範囲が延びるのである．この差は非常に面白い現象である．たとえば，$\mathbb{Z}/2$ 係数においては $H_i(\mathrm{O}_n, (\mathbb{Z}/2)^t) \cong H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}/2)$ であるから，主定理の後半部分にある Bockstein 長完全列を用いれば，特殊直交群のホモロジー安定性も $\mathbb{Z}/2$ 係数であれば $i < n$ において全単射，$i \leq n$ で全射となることが分かる．このため，特殊直交群の整係数ホモロジー安定性の障害は $\mathbb{Z}/2$ に残らない torsion 部分に現れることが窺える．

この事情は，$H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t)$ の安定性の障害にもっとも分かりやすく現れる．命題 3.2 を列

$$H_i(\mathrm{O}_{2m-1}, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{O}_{2m}, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{O}_{2m+1}, \mathbb{Z}^t)$$

に適用する．$K_m = \mathrm{Ker}\, H_i(\iota_{2m}, \mathbb{Z}^t)$ と書けば，$i < 2m-1$ においては

$$H_i(\mathrm{O}_{2m}, \mathbb{Z}^t) \cong H_i(\mathrm{O}_{2m-1})\mathbb{Z}^t) \oplus K_m$$

が成り立つことが分かる．$i < m$ において $K_m = 0$ となるのが，命題 2.2 の主張であった．

3.2 特殊直交群上の対合

(3.1) から誘導される $H_i(\mathrm{SO}_n)$ 上の対合を σ で表す．(3.2) で観察したように，(3.1) は分解するため，例えば群ホモロジーの非斉次 bar resolution において，この σ を具体的に書くことができる．

実は，$H_i(\mathrm{SO}_n) \to H_i(\mathrm{SO}_{n+1})$ は次の可換図式を満たす．

$$\begin{tikzcd}
H_i(\mathrm{SO}_n) \arrow[r, "H_i(\iota_n)"] \arrow[d, "\sigma"'] & H_i(\mathrm{SO}_{n+1}) \\
H_i(\mathrm{SO}_n) \arrow[ur, "H_i(\iota_n)"'] &
\end{tikzcd}$$

これは，簡単な行列の計算によって確認できる．詳細は [4] にある．したがって，$H_i(\iota_n)$ は $H_i(\mathrm{SO}_n)_\sigma$ ($H_i(\mathrm{SO}_n)$ の対合 σ による余不変部分群) を経由することが分かる．

この事実を用いれば，$2i < n$ において，

$$H_i(\mathrm{SO}_n)^\sigma \cong H_i(\mathrm{SO}_n) \cong H_i(\mathrm{SO}_n)_\sigma$$

が成り立つことが分かる．ここで，$H_i(\mathrm{SO}_n)^\sigma$ は $H_i(\mathrm{SO}_n)$ の対合 σ による不変部分群である．すなわち，次の命題が得られる．

命題 3.3 $2i < n$ においては $H_i(\mathrm{SO}_n)$ 上の対合 σ の作用は自明となる．

次に，Lyndon-Hochschild-Serre のスペクトル系列

$$E^2_{p,q} = H_p(\mathbb{Z}/2, H_q(\mathrm{SO}_n)) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{O}_n) \tag{3.4}$$

について思い起こそう．

ここでの主張は次である．

主張 3.4 スペクトル系列 (3.4) の辺準同型

$$e_q\colon H_q(\mathrm{SO}_n)_\sigma = E^2_{0,q} \to E^\infty_{0,q} \to H_q(\mathrm{O}_n)$$

は $q \geq 0$ において単射である．

[7] にあるように，この辺準同型は射入 $\mathrm{SO}_n \to \mathrm{O}_n$ から誘導される準同型 $H_i(\mathrm{SO}_n) \to H_i(\mathrm{O}_n)$ と両立する．すなわち，$H_i(\mathrm{SO}_n) \to H_i(\mathrm{SO}_n)_\sigma \xrightarrow{e_i} H_i(\mathrm{O}_n)$ に分解する．

主張 3.4 の証明は，次の手順でなされる．

(1) まず，準同型 $H_i(\mathrm{SO}_n) = H_i(\mathrm{SO}_n, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t)$ とそのトレース写像 $\mathrm{tr}^t\colon H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{SO}_n)$ の合成は $H_i(\mathrm{SO}_n)$ 上の $(1-\sigma)$ 倍写像となる [1, III 章, (9.5)]．このことから，トレース写像の像は部分群 $(1-\sigma)H_i(\mathrm{SO}_n)$ を含む．

(2) 次に Shapiro の補題の同型

$$H_i(\mathrm{SO}_n) \to H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]) \cong H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}\,\mathrm{O}_n \otimes_{\mathbb{Z}\,\mathrm{SO}_n} \mathbb{Z})$$

の逆向きの写像

$$H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}\,\mathrm{O}_n \otimes_{\mathbb{Z}\,\mathrm{SO}_n} \mathbb{Z}) \cong H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]) \to H_i(\mathrm{SO}_n)$$

を非斉次の bar resolution のチェインの段階で具体的に与える (一般の表式は [3, Lemma 5.5 の後の Remark] に与えられている)．

こうして計算されたトレース写像 tr^t の像は，$H_i(\mathrm{SO}_n)$ 上で $(1-\sigma)$ 倍写像とチェインホモトピックになることが示せる．

以上の議論によって，$\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}^t = (1-\sigma)H_i(\mathrm{SO}_n)$ となることが示される．詳細は [4] にある．

注意 2.3 に書いたように，Bockstein 長完全列 (2.1) において $H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{SO}_n)$ はトレース写像に一致する．したがって，可換図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \arrow[r, "\mathrm{tr}^t"] & H_i(\mathrm{SO}_n) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(\mathrm{O}_n) \arrow[r] & \cdots \\
& & \frac{H_i(\mathrm{SO}_n)}{(1-\sigma)H_i(\mathrm{SO}_n)} \arrow[r, equal] & H_i(\mathrm{SO}_n)_\sigma \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

によって，主張 3.4 は示される．

特に，命題 3.3 にあるように $2i < n$ においては対合 σ は自明になるため，次の系を得る．

系 3.5 トレース写像 $\mathrm{tr}^t \colon H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}^t) \to H_i(\mathrm{SO}_n)$ は零写像である．

注意 3.6 *Cathelineau* は *[2]* において，$H_i(\mathrm{SO}_n, \mathbb{Z}[1/2])$ 上の対合 σ による固有値 ± 1 の固有空間への分解

$$H_i(\mathrm{SO}_n, \mathbb{Z}[1/2]) = H_i(\mathrm{SO}_n, \mathbb{Z}[1/2])^\sigma \oplus H_i(\mathrm{SO}_n, \mathbb{Z}[1/2])^{-\sigma}$$

に対して，

$$H_i(\mathrm{SO}_n, \mathbb{Z}[1/2])^\sigma \cong H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}[1/2]), \quad H_i(\mathrm{SO}_n, \mathbb{Z}[1/2])^{-\sigma} \cong H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}[1/2]^t)$$

となることを示し，さらに次を示している *[2, Theorem 1.4]*．

$$2i < n \text{ のとき，} H_i(\mathrm{O}_n, \mathbb{Z}[1/2]^t) = 0 \text{ となる．} \tag{3.5}$$

系 *3.5* は，*Cathelineau* による結果 (3.5) の精密化になっている．

参考文献

[1] K. S. Brown. *Cohomology of Groups*, volume 87 of *Grad. Texts in Math.* Springer-Verlag, 1982.

[2] J.-L. Cathelineau. Homology stability for orthogonal groups over algebraically closed fields. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **40**:487–517, 2007.

[3] J. L. Dupont. *Scissors Congruence, Group Homology and Characteristic Classes*. Nankai Tracts in Mathematics. World Scientific, 2001.

[4] M. Nakada. On homological stability for orthogonal groups and special orthogonal groups. *preprint*.

[5] C. H. Sah. Homology of classical Lie groups made discrete, I. Stability theorems and Schur multipliers. *Comment. Math. Helv.*, **61**:308–347, 1986.

[6] A. Suslin. Homology of GL_n, characteristic classes and Milnor K-theory. *Springer LNM*, **1046**:357–375, 1984.

[7] C. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*, volume 38 of *Stud. Adv. Math.* Cambridge, 1994.